5. Вывод

На текущий момент является недостаточно изученным взаимосвязь паспортов маршрута, работы транспортных средств и водителей. Предложена схема основных блоков, характеризующих работу транспорта при реализации перевозки груза. Определена зависимость времени работы транспортных средств и водителей от средних скоростей движения, которая учитывает время перерыва водителя на отдых. В дальнейшем целесообразно исследовать полученные зависимости при других схемах реализации грузов.

Литература

1. Гаджинский А.М. Основы логистики: [Текст] «Маркетинг». -М., 1995.-121с.
2. Воркут А.И. Грузовые автомобильные перевозки [Текст] - 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986.- 447с.
3. Артемьев С.П. Междугородные и международные автомобильные перевозки. – М.: Изд-во «Транспорт», 1968. - 164 с.
4. Горев А.Э., Олещенко Е.М. Организация автомобильных перевозок и безопасность движения [Текст]: – М.: Издательский центр «Академия». 2006 – 256с.
5. Савин В.И. Перевозки грузов автомобильным транспортом: – М.: Издательство «Дело и Сервис», 2002. – 544с.
6. Александров Л.А. Организация и планирование грузовых автомобильных перевозок [Текст] М., «Высш. школа», 1977. – 544с.
7. Вельможин В.А., Гудков А.В., Миротин Л.Б., Куликов А.В. Грузовые автомобильные перевозки - М.:Горячая линия – Телеком, 2006-560 с.
8. http://www.bed-breakfast.fegi.ru - сайт сети комплексных туристических модульных систем
9. http://parks.karelia.ru - сайт проекта Тасис ”Развитие парков Карелии”
10. http://autotransinfo.ru – сайт по грузоперевозкам

УДК 519.85

МИНИМАКСНАЯ ПРОБЛЕМА НАЗНАЧЕНИЯ

О.В. Серая
Кандидат технических наук, доцент
Кафедра экономической кибернетики и маркетингового менеджмента
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, 61002
Контактный тел.: 8 (057) 707-66-28
E-mail: Seraya@kpi.kharkov.ua

Запропоновано ефективний метод розв'язання мінімаксної задачі призначення, пристосований для задачі високої розмірності. Описаний метод забезпечує можливість отримання Парето-оптімальної безлічі планів по критеріях – значення сумарних втрат і величина мінімальних втрат

Ключові слова: проблема призначення, розмірність задачі, мінімаксний підхід, комплексний критерій, Парето – оптимальна безліч планів

Предложен эффективный метод решения минимаксной задачи назначения, приспособленный для задачи высокой размерности. Описанный метод обеспечивает возможность получения Парето-оптимального множества планов по критериям – значение суммарных потерь и величина минимальных потерь

Ключевые слова: проблема назначения, размерность задачи, минимаксный подход, комплексный критерий, Парето – оптимальное множество планов

The effective decision method of minimax assignment problem is offered adapted for the task of high dimension. The described method is provided by receipt of Pareto-optimal set of plans on testes are a value of total losses and size of minimum losses

Keywords: assignment problem, dimension of task, minimax approach, complex test, Pareto-optimal set of plans

1. Введение

Проблема назначения является частным случаем транспортной задачи линейного программирования с булевыми переменными и формулируется следующим образом. Пусть необходимо выполнить n различных работ $A_1, A_2, ..., A_n$. Имеется n исполнителей (агрегатов) $B_1, B_2, ..., B_n$, которые с различной эффективностью могут выполнить эти работы. Введем параметр c_{ij}, характеризующий эффективность выполнения работы A_j исполнителем B_i. Набор параметров c_{ij}, $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,n$, сведенный в квадратную матрицу $C=(c_{ij})$, определяет степень целесообразности назначения различных исполнителей для выполнения той или иной работы.

Во многих случаях элементы матрицы C определяют потери, связанные с тем или иным вариантом назначения. При этом естественно поставить задачу отыскания такой расстановки исполнителей, которой соответствуют минимальные суммарные потери. Введем параметр назначения

$$x_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если } i-\text{й исполнитель назначен} \\ \quad \text{для выполнения } j-\text{й работы,} \\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases} \quad (1)$$

Теперь математическая формулировка проблемы назначения имеет вид: найти булев набор $X=(x_{ij})$, минимизирующий функцию потерь

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \quad (2)$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1, \quad j=1,2,...,n,\\ &\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1, \quad i=1,2,...,n.\end{aligned} \quad (3)$$

Решение задачи достигается с использованием так называемого венгерского метода [1-3].

На практике часто возникают варианты сформулированной выше задачи назначения, в которой целевая функция не является аддитивной. К ним относится задача с минимаксным критерием. Такой критерий возникает, например, когда важно минимизировать максимальное из значений потерь.

2. Постановка задачи

Сформулируем задачу следующим образом: найти набор $X=(x_{ij})$, минимизирующий

$$R(x)=\max_{i,j}\{c_{ij}x_{ij}\} \quad (4)$$

и удовлетворяющий ограничениям (1), (3).

Понятно, что $R(x)$ является дискретной функцией, принимающей в зависимости от плана X одно из множества возможных значений $\{c_{11},c_{12},...,c_{ij},...,c_{nn}\}$. Известный метод решения задачи (1), (3), (4) состоит в следующем [4, 5]. Упорядочим множество значений c_{ij} следующим образом:

$$c_{i_1j_1}\le c_{i_2j_2}\le ...\le c_{i_qj_q}\le ...\le c_{i_{n^2}j_{n^2}}. \quad (5)$$

С каждым элементом $c_{i_qj_q}$, $q\in\{1,2,...,n^2\}$, последовательности (5) свяжем двухиндексную матрицу $(d_{ij}^{(q)})$, компоненты которой определим так:

$$(d_{ij}^{(q)})=\begin{cases}0, \text{ если } c_{ij}>c_{i_qj_q},\\ M, \text{ если } c_{ij}\ge c_{i_qj_q},\end{cases}$$

где

$$M>\max_{i,j}(c_{ij}).$$

Сформулируем теперь n^2 следующих задач: найти $X^{(q)}=(x_{ij}^{(q)})$, удовлетворяющий системе уравнений

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}x_{ij}^{(q)}=1, \quad j=1,2,...,n,\\ &\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{(q)}=1, \quad i=1,2,...,n,\end{aligned} \quad (6)$$

$$x_{ij}^{(q)}d_{ij}^{(q)}<M. \quad (7)$$

Задача (6), (7) разрешима не при всех $q\in\{1,2,...,n^2\}$. Она, безусловно, разрешима для $q=n^2$, так в этом случае она сводится к отысканию любого булевого набора, удовлетворяющего системе ограничений (6). Число таких наборов равно $n!$ Понятно, что если эта задача разрешима при некотором $q=q_0$, то она разрешима и при $q=q_0+1$. Ясно также, что задача заведомо неразрешима при $q<n$. Отсюда следует, что существует некоторый номер $q=q^*$ такой, что при $q<q^*$ задача не разрешима, но при $q\ge q^*$ она уже имеет решение. Очевидно, что соответствующий набор $X^{(q^*)}$ является искомым. Таким образом, решение задачи сводится к решению последовательности задач (6), (7) для возрастающих значений q, начиная с $q=n$.

Очевидный недостаток описанной технологии состоит в том, что при высокой размерности задачи может возникнуть необходимость многократного отыскания булева набора переменных, удовлетворяющих (6), (7). Следует отметить нетривиальный характер этих задач, имеющих комбинаторный характер.

Цель статьи – модернизация стандартной технологии решения минимаксной задачи (1), (3), (4) в направлении снижения ее вычислительной сложности.

3.Основные результаты

Предлагается следующая процедура решения задачи (1), (3), (4). Решение задачи является итерационным.

Первая итерация. Выберем любое булево решение системы уравнений (3). Обозначим через $X^{(1)}=(x_{ij}^{(1)})$ соответствующий набор переменных. Введем множество $N^{(1)}=\{(i,j);x_{ij}^{(1)}=1\}$ индексов переменных, входящих в план $X^{(1)}$. Найдем

$$c_{max}^{(1)}=\max_{(i,j)\in N^{(1)}}(c_{ij}). \quad (8)$$

Введем теперь новую матрицу потерь следующим образом:

$$c_{ij}^{(1)}=\begin{cases}c_{ij}, & c_{ij}<c_{max}^{(1)},\\ M, & c_{ij}\ge c_{max}^{(1)}.\end{cases} \quad (9)$$

В результате реализации операции (9) всем элементам матрицы потерь, для которых $c_{ij}\ge c_{max}^{(1)}$, будут приписаны потери, равные M.

Введем множество $\bar{N}^{(1)}=\{(i,j);c_{ij}^{(1)}=M\}$. Соответствующая совокупность элементов матрицы X является запрещенной и не может в дальнейшем использоваться при решении системы уравнений (3). Первая итерация закончена.

Вторая итерация. Выберем любое булево решение $X^{(2)}$ системы уравнений (3), для которого индексы переменных не входят в $\bar{N}^{(1)}$. Если такого решения не существует, то набор $X^{(1)}$ есть искомое решение задачи. В противном случае формируем множество $N^{(2)}=\left\{(i,j);x_{ij}^{(2)}=1\right\}$. Найдем

$$c_{max}^{(2)}=\max_{(i,j)\in N^{(2)}}\left(c_{ij}\right).$$

Введем теперь новую матрицу потерь

$$c_{ij}^{(2)}=\begin{cases}c_{ij}^{(1)}, & c_{ij}^{(1)}<c_{max}^{(2)},\\ M, & c_{ij}^{(1)}\ge c_{max}^{(2)}.\end{cases} \qquad (10)$$

В результате проведения операции (10) в матрице потерь увеличивается число элементов, величина которых будет равна M. Введем множество $\bar{N}^{(2)}=\left\{(i,j);c_{ij}^{(2)}=M\right\}$. Вторая итерация закончена.

В третьей и последующих итерациях описанная процедура продолжается до тех пор, пока на очередной итерации не будет обнаружено, что требуемое решение системы уравнений (3) отсутствует. При этом оптимальным планом задачи будет набор переменных, полученный на предыдущей итерации.

Во многих случаях при решении задачи назначения интерес представляют оба критерия: $L(x)$, определяющий суммарные потери, и $R(x)$, задающий величину максимальных потерь.

Понятно, что набора X, доставляющего минимальное значение одновременно обоим критериям, не существует.

Тогда для отыскания компромиссного решения целесообразно построить итерационную вычислительную процедуру следующим образом.

Первая итерация. Решается задача назначения (1) – (3). Далее, так же, как и в предыдущем варианте решения задачи, формируется множество $N^{(1)}$, отыскивается $c_{max}^{(1)}$ по формуле (8) и вводится новая матрица потерь в соответствии с (9). В результате проведения итерации фиксируются значения первого и второго критериев: $L_1=L\left(X^{(1)}\right)$ и $R_1=c_{max}^{(1)}$.

Вторая итерация. Описанная процедура продолжается с матрицей потерь, полученной на предыдущей итерации.

При этом, если существует решение задачи назначения $X^{(2)}$, для которого суммарные потери не превосходят M, то фиксируются значения критериев $L_2=L\left(X^{(2)}\right)$ и $R_2=c_{max}^{(2)}$, и процедура повторяется. В противном случае решение, полученное на предыдущей итерации, является последним.

В результате проведения некоторого числа, например, k итераций, получим совокупность пар значений критериев $(L_1,R_1),(L_2,R_2),...,(L_k,R_k)$. При этом понятно, что последовательность значений $L_1,L_2,...,L_k$ не убывает, а последовательность значений $R_1,R_2,...,R_k$ - не возрастает.

Поэтому они в совокупности образуют множество Парето не мажорирующих друг друга решений в пространстве критериев (L,R). Компромиссное решение может быть выбрано с помощью какого-либо дополнительного критерия.

Пример. Рассмотрим задачу назначения с матрицей потерь (рис. 1).

$$C_1=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6&2&1&5\\\hline 3&7&3&1\\\hline 1&4&4&2\\\hline 3&5&6&4\\\hline\end{array};\ X^{(1)}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0\\\hline 0&1&0&0\\\hline\end{array}$$

Рис. 1. Исходная матрица потерь и план $X^{(1)}$

На первой итерации получен план $X^{(1)}$, приведенный на рис.1. Этому плану соответствует множество $N^{(1)}=\left\{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\right\}$, значение $c_{max}^{(1)}=5$ и $\bar{N}^{(1)}=\left\{(1,1),(1,4),(2,2),(4,2),(4,3)\right\}$.

Результат проведения итерации: $L_1=L\left(X^{(1)}\right)=8$ и $R_1=5$.

Новая матрица потерь и соответствующий план $X^{(2)}$ приведены на рис. 2.

$$C_2=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline M&2&1&M\\\hline 3&M&3&1\\\hline 1&4&4&2\\\hline 3&M&M&4\\\hline\end{array};\ X^{(2)}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1\\\hline 0&1&0&0\\\hline 1&0&0&0\\\hline\end{array}$$

Рис. 2. Новая матрица потерь и план $X^{(2)}$

Полученному на второй итерации плану соответствует множество $N^{(2)}=\left\{(1,3),(2,4),(3,2),(4,1)\right\}$, значение $c_{max}^{(2)}=4$ и множество $\bar{N}^{(2)}=\left\{(1,1),(1,4),(2,2),(3,3),(4,4)\right\}$.

Результат проведения итерации: $L_2=L\left(X^{(2)}\right)=9$ и $R_2=4$.

Новая матрица потерь и полученный в результате проведения третьей итерации план $X^{(3)}$ приведены на рис. 3.

$$C_3=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline M&2&1&M\\\hline 3&M&3&1\\\hline 1&M&M&2\\\hline 3&M&M&M\\\hline\end{array};\ X^{(3)}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&0\\\hline 0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0\\\hline\end{array}$$

Рис. 3. Новая матрица потерь и план $X^{(3)}$

Полученному на третьей итерации плану соответствует множество $N^{(3)}=\left\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\right\}$, значение $c_{max}^{(3)}=3$ и множество:

$$\bar{N}^{(3)}=\left\{(1,1),(1,4),(2,2),(3,2),(3,3),(4,2),(4,3),(4,4)\right\}.$$

Результат проведения итерации: $L_3=L\left(X^{(3)}\right)=10$ и $R_3=3$.

Новая матрица потерь на рис. 4.

$$C_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline M & 2 & 1 & M \\ \hline M & M & M & 1 \\ \hline 1 & M & M & 2 \\ \hline M & M & M & M \\ \hline\end{array}$$

Рис. 4. Новая матрица потерь

Понятно, что дальнейшее проведение процедуры невозможно, поскольку все элементы четвертой строки запрещены.

Таким образом, в результате решения двухкритериальной задачи назначения получены три плана $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$, образующие Парето оптимальное множество, изображенное на рис. 5.

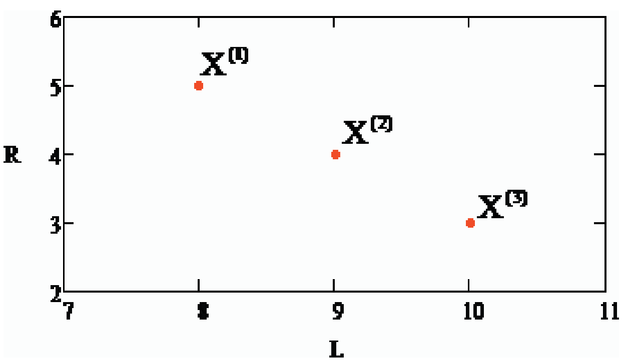

Рис. 5. Парето - оптимальное решение задачи

При этом план $X^{(1)}$ является наилучшим по критерию L и одновременно наихудшим по критерию R. План $X^{(3)}$, напротив, наихудший по L, но наилучший по R. План $X^{(2)}$ - промежуточный.

Для выбора компромиссного плана нужен какой-либо дополнительный критерий, например, средневзвешенное значение двух основных:

$$F = \alpha_1 L + \alpha_2 R, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Если считать, что второй критерий вдвое важнее первого и выбрать $\alpha_1 = 2/3$, $\alpha_2 = 1/3$, то $F(X^{(1)}) = 6$, $F(X^{(2)}) = 17/3$, $F(X^{(3)}) = 16/3$, тогда наилучшим будет план $X^{(3)}$, которому соответствует наименьшее значение дополнительного критерия F.

4. Выводы

Предложена эффективная вычислительная процедура решения минимаксной задачи назначения. Преимущества предложенного метода решения задачи по сравнению с традиционным объясняются радикальным сокращением множества допустимых планов после проведения каждой итерации. Рассмотрена возможность решения двухкритериальной задачи назначения с учетом значений средних и максимальных потерь.

Литература

1. Юдин Д.Б. Задачи и методы линейного программирования / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М.: Сов. радио, 1964. – 736с.
2. Корбут А.А. Дискретное программирование / А.А. Корбут, Ю.Ю. Финкельштейн. – М.: Наука, 1969. - ? с.
3. Раскин Л.Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления / Л.Г. Раскин. – М.: Сов. Радио, 1976. – 344с.
4. Юдин Д.Б. Экстремальные модели в экономике / Д.Б. Юдин, А.Д. Юдин. – М.: Экономика, 1979. – 202с.
5. Саати Т. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы: пер. с англ. / Т. Саати. – М.: Мир, 1973. – 284с.